QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La fonction $x \mapsto 2e^{2x}$ est solution de l'équation différentielle
☐ $y' = 4y$. ☐ $y' = -4y$. ☐ $y' = 2y$.

2. Si f est la solution de l'équation différentielle $y' = 2y$ telle que $f(0) = 1$ alors la courbe de f admet une tangente
☐ horizontale. ☐ parallèle à $y = 2x$. ☐ parallèle à $y = -x$.

3. Si f est la solution de l'équation différentielle $y' = -y + 1$ telle que $f(0) = 1$ alors la fonction f est
☐ négative. ☐ positive. ☐ n'a pas un signe constant.

4. La fonction $x \mapsto 2\cos x - 3\sin x$ est solution de l'équation différentielle
☐ $y'' + 2y = 0$. ☐ $y'' + y = 0$. ☐ $y'' + 3y = 0$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $f : x \mapsto 2^x$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - \ln 2 - y = 0$.

2. Si f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -2y$ alors la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Si f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 3y$ telle que $f'(1) = 3$ alors $f(1) = 1$.

4. Si f est la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + 2y = 0$ qui s'annule et change de signe en $\frac{\pi}{4}$ alors sa courbe dans un repère orthonormé admet un point d'inflexion.

1 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles ci-dessous.

a. $y'+3y=0$.

b. $y'+\sqrt{2}y=0$.

c. $-5y'+y=0$.

2. Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

a. $y'-\frac{y}{2}=0$ et $y(-1)=e$.

b. $-3y'-y=0$ et $y(\ln 8)=1$.

c. $y'-2y=0$ et $y(0)=1$.

2 1. Déterminer la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} f'=af, \\ f(0)=1, \\ f(x+10)=2f(x). \end{cases}$

2. Représenter f.

3 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ chacune des équations différentielles ci-dessous

a. $y'-2y+1=0$.

b. $y'-\pi y+3=0$.

c. $-2y'+5y-1=0$.

2. Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

a. $y'-y-1=0$ et $y(2)=0$.

b. $2y'+y-3=0$ et $y(0)=3$.

c. $y'+3y+\frac{3}{4}=0$ et $y(-1)=0$.

4 La loi de refroidissement de Newton, établit que la vitesse instantanée de perte de chaleur d'un corps homogène et inerte est proportionnelle à la différence de température entre le corps et le milieu.
On suppose que la température de l'air ambiant est constante et égale à 25 °C.
Dans ces conditions, la température d'un corps homogène et inerte passe de 100 °C à 75 °C en 15minutes.
On désigne par $f(t)$ la température de ce corps à t minutes.
1. Vérifier qu'il existe un réel a tel que $\begin{cases} f'(t)=a(f(t)-25) \\ f(0)=100 \\ f(15)=75 \end{cases}$

2. Déterminer f.
3. Au bout de combien de temps (à 1minute prés), ce corps aura une température de 25°C ?

5 Une substance se dissout dans l'eau à une vitesse instantanée proportionnelle à la quantité non encore dissoute.
On place 20 g de cette substance dans un volume d'eau suffisant pour la dissoudre totalement. On sait que les dix premiers grammes se dissolvent en 5 minutes.
1. Donner l'expression de la quantité dissoute $f(t)$ (en grammes) en fonction du temps t (en minutes).
2. Quelle est la quantité (à 1mg près) non dissoute au bout de 10minutes ? 30minutes ? 1heure ?

6 On désigne par $C(t)$ la concentration (en mg/l) d'un certain médicament dans le sang, en fonction du temps exprimé en heures. La concentration initiale est de 5 mg/l.
On suppose que la vitesse instantanée d'élimination de ce médicament par l'organisme est donnée par $C'(t)=-0.25\,C(t)$.

1. Déterminer $C(t)$.

2. Représenter la fonction $C: t \mapsto C(t)$.

3. Donner un encadrement à 0.1 près de l'instant t_0 à partir duquel $C(t)<1$.

7 La charge et la décharge d'un condensateur sont définies sur l'intervalle $[0,2\ln 3[$ par la fonction f qui vérifie les conditions suivantes :
• Sur l'intervalle $[0,2\ln 3[$, f est une solution de l'équation différentielle $y'+y=0$ avec $f(\ln 3)=-2$.

1. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.

2. Etudier f et la représenter.

8 1. Vérifier que la fonction $u: x \mapsto 2$ vérifie l'équation différentielle $y'+2y=y^2$.

1. Soit E l'ensemble des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$, qui ne s'annulent pas sur $\mathbb{R}$, telles que $f'(x)+2f(x)=(f(x))^2$ pour tout réel x.

a. Vérifier que l'ensemble E est non vide.

b. Soit f une fonction de E.

Montrer que la fonction $g=\frac{1}{f}$ est une solution d'une équation différentielle de la forme $y'=ay+b$, où a et b sont deux réels.

c. Déterminer alors E.

9 Dans une culture de microbes, le nombre de microbes à un instant t, exprimé en heures, peut être considéré comme une fonction y à valeurs réelles de la variable t.

La vitesse de prolifération à l'instant t du nombre de microbes est la dérivée y' de cette fonction.

On a constaté que : $y'(t)=ky(t)$ où k est un coefficient réel strictement positif.

On désigne par N le nombre de microbes à l'instant $t=0$.

1. Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y'=ky$ telle que $y(0)=N$.

2. Sachant qu'au bout de deux heures, le nombre de microbes a quadruplé, calculer en fonction de N, le nombre de microbes au bout de trois heures.

3. Quelle est la valeur de N sachant que la culture contient 6400 microbes au bout de cinq heures ?

10 L'objet du problème est l'étude de quelques propriétés de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{-x}\sin x$.

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.(l'unité graphique étant 2 cm sur l'axe des abscisses et 10 cm sur l'axe des ordonnées).

1. a. Calculer f' et vérifier que $f'(x)=\sqrt{2}e^{-x}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$.

b. Résoudre dans l'intervalle $[0,2\pi]$ l'inéquation $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)>0$

En déduire le signe de f' sur $[0,2\pi]$.

c. Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0,2\pi]$.

Préciser les tangentes à C aux deux extrémités de l'intervalle.

2. On note C_1 et C_2 les représentations graphiques des deux fonctions $x\mapsto e^{-x}$ et $x\mapsto -e^{-x}$.

a. Donner les abscisses, dans $[0,2\pi]$, des points où C rencontre C_1 et C_2.

b. Vérifier qu'en chacun des points communs précédents, les courbes C et C_1 d'une part, C et C_2 d'autre part, ont même tangente.

3. a) Vérifier que $f''+2f'+2f=0$.

b. Calculer, en cm^2, l'aire du domaine du plan limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\pi$.

11 Soit l'équation différentielle $(E): y'+2y=x^2$.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y'+2y=0$.

2. Déterminer un trinôme du second degré qui vérifie (E).

3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f-g$ est une solution de (E_0).

4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

12 Soit l'équation différentielle $(E): y'-y=4\cos x$.

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y'-y=0$.

2. Déterminer les nombres a et b tels que la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=a\cos x+b\sin x$, vérifie (E).

3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E), si et seulement si, $f-g$ est une solution de (E_0).

4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E).

13 Dans un circuit contenant un générateur de force électromotrice E ainsi qu'une bobine de résistance r (en ohms) et d'inductance L (en henrys), on montre que l'intensité est une fonction du temps solution de l'équation différentielle $Ly'+ry=E$.

On prend $E=10v$, $r=100\Omega$ et $L=0.2H$.

A l'instant 0, l'intensité est nulle dans le circuit.

1. Déterminer la fonction $i: t\mapsto i(t)$ décrivant l'évolution de l'intensité i en fonction du temps.

2. Déterminer la limite de i quand t tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.

14 Pour chacun des cas ci-dessous, donner la solution f sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle.

1. $y''+2y=0$, $y(0)=1$ et $y'(0)=\sqrt{2}$.
2. $y''+16y=0$, $y(\pi)=-1$ et $y'(\pi)=-2$.
3. $y''+\frac{y}{4}=0$, $y(-\pi)=1$ et $y'(-\pi)=0$.

15 On désigne par (E) l'équation différentielle $y''=2y'$.

1. En posant $z=y'$, résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f'(0)=1$ et $f(0)=2$.

16 On désigne par (E) l'équation différentielle $y''=-3y'+1$.

1. En posant $z=y'$, résoudre (E) sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer la solution f de (E) vérifiant $f'(0)=0$ et $f(0)=0$.

17 1. Résoudre l'équation différentielle $y''+16y=0$.

2. Trouver la solution f de cette équation vérifiant $f(0)=1$ et $f'(0)=4$.
3. Trouver deux réels positifs a et b tels que pour tout réel t, $f(t)=\sqrt{2}\cos(at-b)$.
4. Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0,\frac{\pi}{8}]$.

18 1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y''+y'=0$.

2. En déduire les solutions de l'équation différentielle $y'''+y''=0$.

19 1. Linéariser $\cos^4(x)$.

2. Déterminer les réels a, b et c pour que la fonction $g: x\mapsto a\cos(4x)+b\cos(2x)+c$ soit solution de l'équation différentielle. $(E): y''+y'=\cos^4(x)$.
3. Montrer qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction $f-g$ est solution de l'équation différentielle $y''+y'=0$.
4. En déduire toutes les solutions de (E), puis celle qui vérifie les conditions $y(0)=1$ et $y'(0)=0$.

20 Soit l'équation différentielle $4y''+\pi^2y=0$

1. Résoudre cette équation différentielle.
2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

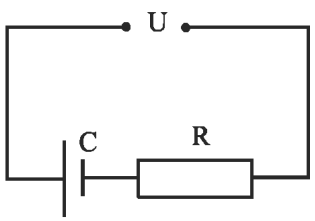
Déterminer la fonction g solution de cette équation différentielle, qui satisfait aux conditions ci-dessous.

- La courbe représentative de g passe par le point N de coordonnées $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
- La tangente à cette courbe en N est parallèle à l'axe des abscisses.

3. Vérifier que pour tout réel x, $g(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x-\frac{\pi}{4}\right)$.

21 On considère le circuit électrique ci-dessous où C est la capacité du condensateur, R la valeur de la résistance et U désigne la tension aux bornes du circuit.

En physique, on montre que $Rq'(t)+\frac{1}{C}q(t)=U$ où q, la charge du condensateur, est une fonction du temps qui prend la valeur 0 pour $t=0$.



1. Ecrire l'équation différentielle vérifiée par q.
2. Montrer que $q(t)=CU-CUe^{-\frac{t}{RC}}$
3. Sachant que l'intensité $i(t)=q'(t)$, déterminer $i(t)$.

22 On se propose de déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ et vérifiant l'équation

(E): Pour tout réel x, $f(x)=\int_0^x f(t)dt+x$.

1. Montrer que si une fonction f vérifie l'équation (E), alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que toute solution de (E) est solution de l'équation différentielle $(E'): y' = y+1$.

Réciproquement ,quelle condition doit vérifier une solution de (E') pour être une solution de (E) ?

3. Résoudre (E).

23 **(La piqûre intraveineuse)**

A l'instant $t=0$ (t est exprimé en heures), on injecte dans le sang par piqûre intraveineuse une dose de 1.8 unité d'une substance médicamenteuse.
On suppose que la substance se répartit instantanément dans le sang et qu'elle est ensuite progressivement éliminée.
On note $Q(t)$ la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t, exprimée en unités adaptées.
On admet que le processus d'élimination se modélise par l'équation différentielle $Q'(t) = -\alpha Q(t)$ où α est un nombre qui sera déterminé expérimentalement.

1. Montrer que $Q(t) = 1.8e^{-\alpha t}$.

Sachant qu'au bout d'une heure, la quantité de substance présente dans le sang a diminué de 30 %, en déduire une équation vérifiée par α.

En utilisant la fonction $x \mapsto e^{-x}$, montrer qu'il existe un réel α unique tel que $e^{-\alpha} = 0.7$

Donner une valeur décimale approchée de α à 10^{-4} près.

2. Etudier le sens de variation de Q pour $t \geq 0$, déterminer sa limite en $+\infty$ et tracer la courbe représentative C de Q.

3. On décide de réinjecter une dose analogue à l'instant $t=1$ (au bout d'une heure), puis aux instants $t=2$, $t=3$, etc.

On note R_n la quantité de substance présente dans le sang à l'instant $t=n$, dès que la nouvelle injection est faite.

a. Montrer que $R_1 = 1.8 + 0.7 \times 1.8$.

b. Montrer que $R_2 = 1.8 + 0.7 \times R_1$ et calculer R_2.

c. Exprimer R_{n+1} en fonction de R_n.

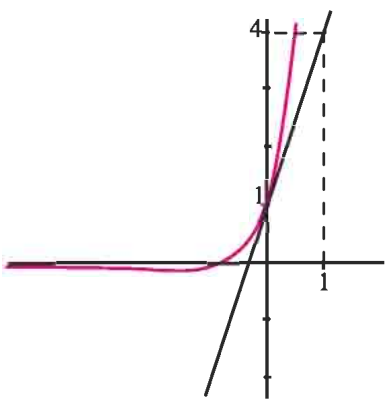
d. Montrer que pour tout entier naturel n,
$R_n = 6\left(1-(0.7)^{n+1}\right)$.

e. Déterminer la limite de R_n quand n tend vers l'infini.

24 On considère les deux équations différentielles $(I): y' = 2y$ et $(II): y' = y$.

1. Résoudre chacune de ces équations différentielles.

2. Le graphique ci-dessous représente une partie de la courbe C d'une fonction f et d'une de ses tangentes T, dans un repère orthonormé.
Cette fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, où f_1 est une solution de l'équation (I) et f_2 une solution de l'équation (II).



2.a. A partir des données lues sur le graphique, donner $f(0)$ et $f'(0)$.

b. Déterminer les fonctions f_1 et f_2.

En déduire que, pour tout réel x, $f(x) = 2e^{2x} - e^{x}$.

c. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

d. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de la courbe C avec l'axe des abscisses.

3. Soit un réel $t < -\ln 2$.

a. Exprimer à l'aide de t, l'aire $\mathcal{A}(t)$ du domaine du plan limité par C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = t$ et $x = -\ln 2$.

b. Montrer que $\lim\limits_{t \to -\infty} \mathcal{A}(t) = \int_{-\ln 2}^{0} f(t)dt$.

Interpréter graphiquement.

25 1. a. Résoudre l'équation différentielle $(E): 4y' + 3y = 0$.

b. Déterminer la fonction f, solution de (E) telle que $f'(0) = -6$.

2. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle $I = [0,4]$ par $g(x) = 8e^{-0.75x}$.

a. Etudier les variations de g sur I et tracer sa courbe représentative (C) dans le plan rapporté à un repère orthonormé.
b. Soit A le domaine plan compris entre la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=4$.
Calculer le volume V du solide engendré par la rotation du domaine A autour de l'axe des abscisses.
On donnera la valeur exacte de V en cm^3 puis sa valeur approchée arrondie au mm^3.

26 La masse de sel (en grammes) que contient un mélange d'eau et de sel à l'instant t (en minutes) est notée m(t).
Soit m la fonction qui à tout instant t associe le réel m(t). Nous admettons que la fonction m vérifie les conditions ci-dessous.
$m(0)=300$, m est solution sur $[0,+\infty[$ de l'équation différentielle $(E): 5y'+y=0$.
1.a. Résoudre l'équation différentielle (E).
b. Montrer que pour tout t de $[0,+\infty[$, $m(t)=300e^{-0.2t}$.
2. Déterminer le réel t_0 tel que $m(t_0)=150$.
3. Nous admettrons qu'il est impossible de détecter la présence de sel à l'instant t, si et seulement si, $m(t)\le 10^{-2}$.
A partir de quel instant est-il impossible de détecter la présence de sel ?

27 Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\cos x-\sin x$.
1. Montrer que pour tout réel x, $g'(x)=g(\pi-x)$.
2. On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout x réel, $f'(x)=f(\pi-x)$.
a. Montrer que f est deux fois dérivable et que f est solution de l équation différentielle $y''+y=0$.
b. Déterminer les fonctions f.

28 A/ On se propose de résoudre l'équation différentielle $(E): y'-2y=-\dfrac{2}{1+e^{-2x}}$.
1. Déterminer la solution de l'équation $y'-2y=0$ qui prend la valeur 1 en 0.
2. soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0)=\ln 2$, et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}g(x)$.
a. Calculer $g(0)$.
b. Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.
c. Montrer que f est une solution de (E), si et seulement si, $g'(x)=\dfrac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$.
d. En déduire l'expression de $g(x)$, puis celle de $f(x)$ de telle sorte que f soit solution de (E).
B/ Etude de la fonction f définie par $f(x)=e^{2x}\ln\left(1+e^{-2x}\right)$.
1. On pose $h(x)=\ln\left(1+e^{-2x}\right)-\dfrac{1}{e^{2x}+1}$.
a. Etudier la limite de h en $+\infty$.
b. Etudier le sens de variation de h.
c. En déduire le signe de $h(x)$, pour tout réel x.
2. Calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ est du signe de $h(x)$.
3. Etudier la limite de f en $+\infty$.
Montrer que $f(x)=e^{2x}\left[-2x+\ln\left(1+e^{2x}\right)\right]$.
En déduire la limite de f en $-\infty$.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Représenter graphiquement la fonction f dans un repère orthonormé en prenant 5 cm pour unité.
Préciser la tangente au point d'abscisse nulle.
C/ 1. En remarquant que $\dfrac{1}{1+e^{-2x}}=\dfrac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$, déterminer une primitive de la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{1+e^{-2x}}$.
2. Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, l'aire $\left(\text{en } cm^2\right)$ du domaine du plan limité par l'axe des abscisses, la courbe représentative de la fonction f

définie au B/ et les droites d'équations $x=-1$ et $x=0$.

On donnera la valeur exacte de cette aire ainsi qu'une valeur approchée à 10^{-3} près.

D/ On définit la suite (u_n) définie par $u_0=0$ et $u_{n+1}=f(u_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Montrer que $f([0,1])\subset[0,1]$ et en déduire que pour tout $n\geq 0$, $u_n\in[0,1]$.

2. Montrer par récurrence que la suite (u_n) est croissante.
En déduire qu'elle converge vers un réel α.

3. Vérifier que $f(\alpha)=\alpha$ et $0<\alpha<1$.

4. Utiliser le graphique de f, pour donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

29 Un corps dont la température initiale θ_0 est égale à 30 °C, est placé dans une ambiance dont la température T est constante.
La température de ce corps est une fonction du temps $\theta: t\mapsto\theta(t)$.
Une loi de physique (Newton) énonce que la dérivée de θ est proportionnelle à la différence entre la température ambiante et la température du corps.
On a donc $\theta'(t)=k[T-\theta(t)]$ où k est le coefficient de proportionnalité fixé par la nature, la forme, la taille, etc. du corps.
On prend $k=0.1$ et $\theta_0=30$ °C, la température pour $t=0$.
Le temps est exprimé en minutes, les températures en degrés Celsius.
1. Exprimer cette loi à l'aide d'une équation différentielle en précisant les conditions initiales.
2. Dans cette question, T, la température ambiante, est 100 °C.
a. Déterminer θ, la solution de cette équation différentielle.
b. Calculer la limite de θ quand t tend vers $+\infty$ et interpréter ce résultat.
3. Représenter les courbes d'évolution de la température en fonction du temps pour $T=100$ °C, $T=30$ °C et $T=-10$ °C.

30 Un fil conducteur parcouru par un courant électrique d'intensité constante s'échauffe par effet Joule et sa température, en degrés Celsius, est une fonction θ du temps t exprimé en secondes .On choisit l'instant de mise sous tension comme origine des temps $(t=0)$ et, à cet instant, la température du conducteur est égale à 0 °C.
Dans les conditions de l'expérience, la fonction θ vérifie $\theta'(t)+0.1\theta(t)=2$.
1. Déterminer $\theta(t)$, $t\in\mathbb{R}_+$.
2. a. Quelle température atteint le conducteur au bout de dix secondes, au bout d'une minute ?
b. Calculer la limite de $\theta(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et interpréter cette limite.

31 A/ On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{3e^{\frac{x}{5}}}{e^{\frac{x}{5}}+2}$ et C sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthogonal. (L'unité graphique étant 1cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées).
1. Etudier les variations de la fonction f et préciser les asymptotes de C.
2. Donner l'équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.
3. Tracer C, la tangente et les asymptotes.
4. a. Trouver la primitive de f qui s'annule en 0.
b. Calculer le nombre qui mesure (en unités d'aire) l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la courbe (C) et la droite d'équation $x=5$.
B/ 1. Une population de poissons d'une certaine espèce croît au cours des ans selon la loi $g'=\dfrac{g}{5}$ (I), où g désigne la quantité de poissons (exprimée en milliers) dépendant du temps t (exprimé en années).
a. Résoudre l'équation différentielle (I).
b. Sachant qu'à l'instant $t=0$, la population comprend un millier de poissons, trouver l'expression de g.
2. En réalité, un prédateur de cette espèce empêche une telle croissance, tuant chaque année une certaine quantité de poissons (dépend de l'effectif total).
La population suit alors la loi : $g'=\dfrac{g}{5}-\dfrac{g^2}{15}$ (II).

a. On pose $h=\dfrac{g}{3-g}$ et on suppose que pour tout t on a $g(t)\neq 3$.

Montrer que g est solution de (II), si et seulement si, h est solution de (I).

b. Trouver les fonctions h solutions de (I), puis les fonctions g solutions de (II).

c. Trouver la fonction g solution de (II) telle que $g(0)=1$.

Montrer que cette fonction coïncide avec la fonction f étudiée dans la partie A.

d. Vers quelle limite tend la population de poissons ?

32 On considère un circuit électrique fermé comprenant un condensateur dont la capacité, exprimée en farads, a pour valeur C, une bobine dont l'inductance, exprimée en henrys, a pour valeur L et un interrupteur.

Le temps t est exprimé en secondes.

A l'instant $t=0$, on suppose le condensateur chargé. On ferme l'interrupteur et le condensateur se décharge dans le circuit.

On appelle $q(t)$ (en Coulombs) la valeur de la charge du condensateur à l'instant t.

La fonction q est deux fois dérivable sur $[0,+\infty[$.

On admet que la fonction q est solution de l'équation différentielle $(E): y''+\dfrac{1}{LC}y=0.$

Dans tout l'exercice on prend $C=1.25\times10^{-3}$ et $L=0{,}5\times10^{-2}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E).

2. Déterminer la solution q de (E) vérifiant $q(0)=6\times10^{-3}$ et $q'(0)=0$.

3. On sait que la valeur $i(t)$ de l'intensité, exprimée en ampères, du courant qui parcourt le circuit à l'instant t vérifie $i(t)=-q'(t)$.

On définit ainsi une fonction i sur l'intervalle $[0,+\infty[$.

a. Vérifier que, pour tout t de $[0,+\infty[$, $i(t)=2.4\sin(400t)$.

b. Calculer $\dfrac{400}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{400}}\cos(800t)dt$.

a. On désigne par I_e la valeur (positive), exprimée en ampères, de l'intensité efficace dans le circuit.
Son carré est donné par la formule

$$(I_e)^2=\frac{400}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{400}}i^2(t)dt.$$

Calculer $(I_e)^2$, puis donner une valeur approchée de I_e à 10^{-3} près.

QCM :

1) $y' = 2x$

2) parallèle à : $y = 2x$

3) f est positive

4) $y'' + y = 0$

Vrai ou faut :

1) faut

En effet : $f(x) = 2^x$

$f'(x) = 2^x.\text{Ln}2$

$f'(x) - \text{Ln}2 - f(x) \neq 0$

2) faut

$f(x) = e^{-2x}$ est une solution de l'équation $y' = -2x$

$f'(x) = -2e^{-2x} \leq 0 \; ; \forall x \in \text{IR}$

f est décroissante sur IR

3) vrai

F est solution de $y' = 3y$

$\Rightarrow f'(x) = 3.f(x) \; ; \forall x \in \text{IR}$

$\Rightarrow f'(1) = 3.f(1) = 3$

$\Rightarrow f(1) = 1$

4) vrai

Démonstration

$f''(x) + 2f(x) = 0 \quad ; \forall x \in \text{IR}$

$\Rightarrow f''(x) = -2f(x) \quad ; \forall x \in \text{IR}$

f s'annule en $\frac{\pi}{4}$ et change de signe d'où

f'' s'annule et change de signe en $\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow (C_f)$ admet le point $I(\frac{\pi}{4}, f(\frac{\pi}{4}))$ comme Point d'inflexion.

EXERCICE 1 :

1) – a) $y' = -3y$

Les solutions sont les fonctions définies sur IR par : $f(x) = k.e^{-3x}$; $k \in \text{IR}$

b) $y' = -\sqrt{2}\,y$

les solutions sont les fonctions définies sur IR par : $f(x) = k.e^{-\sqrt{2}x}$; $k \in \text{IR}$

c) $y' = \frac{1}{5}y$

$f(x) = k.e^{\frac{x}{5}}$; $k \in \text{IR}$

2) – a) $y' = \frac{1}{2}y$ et $f(-1) = e$

La solution est : $f(x) = e.e^{\frac{1}{2}(x+1)} = e^{\frac{1}{2}(x+3)}$

b) $y' = -\frac{1}{3}y$ et $y(\text{Ln}8) = 1$

la solution est :

$f(x) = 1.e^{-\frac{1}{3}(x - \text{Ln}8)} = 2e^{-\frac{1}{3}x}$

c) $y' = 2y$ et $f(0)$ 1

la solution est :

$f(x) = e^{2x}$

EXERCICE 2 :

1) $\begin{cases} f'(x) = a\,f(x) \\ f(0) = 1 \\ f(x+10) = 2f(x) \end{cases}$ $\quad \forall x \in \text{IR}$

f est la solution de l'équation différentielle :

$y' = a\,y$ et $f(0) = 1$

d'où : $f(x) = e^{ax}$

* $f(x + 10) = 2f(x)$

$\Rightarrow e^{a(x+10)} = 2e^{ax}$

$\Rightarrow e^{ax}.e^{10a} = 2e^{ax} \Rightarrow e^{10a} = 2$

$\Rightarrow 10a = \text{Ln}2 \Rightarrow a = \frac{1}{10}\text{Ln}2$

D'où $f(x) = e^{\frac{x}{10}\text{Ln}2} = \sqrt[10]{2^x}$

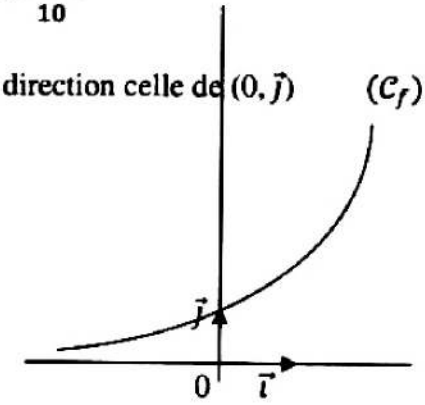
2) $f'(x) = \frac{\text{Ln}2}{10}e^{\frac{x}{10}\text{Ln}2} > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{X \to +\infty} \frac{Ln2}{10} \frac{e^X}{X}$$
$$= +\infty$$

Avec $X = \frac{xLn2}{10}$

B.P de direction celle de $(0, \vec{j})$ $(\mathcal{C}_f)$



EXERCICE 3 :

1) – a) $y' = 2y - 1$

Les solutions sont les fonctions définies sur IR par : $f(x) = k.e^{2x} + \frac{1}{2}$; $\forall k \in IR$

b) $y' = \pi x - 3$

... $f(x) = k.e^{\pi x} + \frac{3}{\pi}$; $\forall k \in IR$

c) $y' = \frac{5}{2} y - \frac{1}{2}$

... $f(x) = k.e^{\frac{5}{2}x} + \frac{1}{5}$; $\forall k \in IR$

2) – a) $y' = y + 1$ et $y(2) = 0$

La solution est : $f(x) = e^{x-2} - 1$

b) $y' = -\frac{1}{2} y + \frac{3}{2}$ et $y(0) = 3$

$f(x) = (3 - 3)e^{-\frac{1}{2}x} + 3 = 3$

c) $y' = -3 y - \frac{3}{4}$ et $y(-1) = 0$

$f(x) = \frac{1}{4} e^{-3(x+1)} - \frac{1}{4}$

EXERCICE 4 :

1) $f'(t)$: vitesse instantanée

$f'(t)$ et $(f(t) - 25)$ sont proportionnelles

$\Rightarrow f'(t) = a [f(t) - 25]$; $a \in IR$

* La température initiale est 100°c

$\Rightarrow f(0) = 100$

* f(t) prend la valeur 75 pour t = 15 mn

$\Rightarrow f(15) = 75$

D'où $\begin{cases} f'(t) = a [f(t) - 25] \\ f(0) = 100 \\ f(15) = 75 \end{cases}$

2) f est solution de l'équation différentielle :

$y' = ay - 25a$ d'où

$f(t) = k.e^{at} + 25$; $k \in IR$

* $f(0) = 100 \Rightarrow k + 25 = 100 \Rightarrow k = 75$

d'où $f(t) = 75e^{at} + 25$

* $f(15) = 75 \Rightarrow 75e^{15a} + 25 = 75$

$\Rightarrow e^{15a} = \frac{2}{3} \Rightarrow 15\,a = Ln(\frac{2}{3})$

$\Rightarrow a = \frac{1}{15} Ln(\frac{2}{3})$ d'où

$f(t) = 75e^{\frac{t}{15} Ln(\frac{2}{3})} + 25$

3) $f(t) - 25 \leq 1 \Leftrightarrow e^{\frac{t}{15} Ln(\frac{2}{3})} \leq \frac{1}{75}$

$\Leftrightarrow \frac{t}{15} Ln(\frac{2}{3}) \leq -Ln(75)$

$\Leftrightarrow t \geq \frac{-15Ln(75)}{Ln(\frac{2}{3})}$ à la calculatrice

$t \geq ...$

EXERCICE 5 :

1) $\begin{cases} f'(t) = a (20 - f(t)) \\ f(5) = 10 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

f est une solution de l'équation différentielle : $y = -a y + 20a$

et $f(5) = 10$

d'où : $f(t) = (10 - \frac{20a}{a})e^{-a(t-5)} + \frac{20a}{a}$

$f(t) = -10\, e^{-a(t-5)} + 20$

* $f(0) = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{5}\text{Ln}2$ d'où

$f(t) = -10\, e^{-\frac{1}{5}\text{Ln}2\,(t-5)} + 20$

$f(t) = -20\, e^{-\frac{t}{5}\text{Ln}2} + 20$

2) * $q(10) = 20 - f(10) = 20e^{-2\,\text{Ln}2}$

$= \frac{20}{e^{\text{Ln}4}} = \frac{20}{4} = 5$

$q(10) = 5g$

* $q(30) = 20 - f(30) = \frac{20}{64} = 0{,}312g$

* $q(60) = 20 - f(60) = \frac{5}{2^{10}} = 0{,}004g$

EXERCICE 6 :

1) $\begin{cases} C'(t) = -0{,}25\, C(t) \\ C(0) = 5 \end{cases}$

C est une solution de l'équation différentielle : $y'(t) = -0{,}25\, y(t)$

et $C(0) = 5$

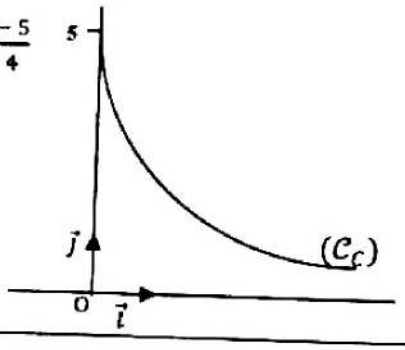
d'où : $C(t) = 5.e^{-0{,}25\,t}$

2)

$C(t) = 5\, e^{\frac{-t}{4}}$ alors $C'(t) = \frac{-5}{4} e^{\frac{-t}{4}} < 0$

x	0	$+\infty$
$C'(x)$	-	
$C(x)$	5 ↘	0

$C'(0) = \frac{-5}{4}$



3) $C(t) < 1 \Leftrightarrow e^{\frac{-t}{4}} < \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{-t}{4} < -\text{Ln}5$

$\Leftrightarrow t > 4\text{Ln}5$

A la calculatrice $\ldots \leq t \leq \ldots$

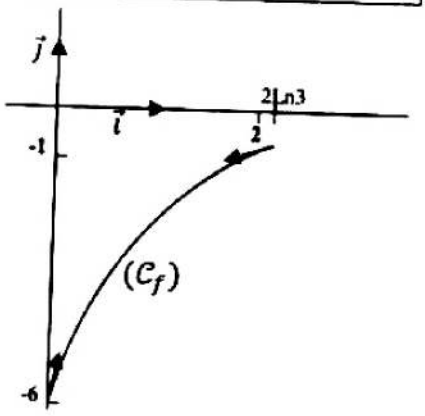
EXERCICE 7 :

1) $y' = -y$ et $f(\text{Ln}3) = -2$

$f(x) = -2\, e^{-(x-\text{Ln}3)} = -6\, e^{-x}$

2) $f'(x) = 6\, e^{-x}$

x	0	$2\text{Ln}3$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	-6 ↗	$-\frac{2}{3}$



EXERCICE 8 :

1) $U(x) = 2$; $U'(x) = 0$

$U'(x) + 2\, U(x) = 4 = (U(x))^2$

D'où U est une solution de l'équation différentielle : $y' + 2y = y^2$

2) – a) $U \in (E)$ d'où $E \neq \phi$

b) $f \in (E) \Leftrightarrow f'(x) + 2\, f(x) = f^2(x)$

$\Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} + \frac{2}{f(x)} = 1$

$\Leftrightarrow -(\frac{1}{f})'(x) + 2(\frac{1}{f})(x) = 1$

$\Leftrightarrow -g'(x) + 2g(x) = 1$

$\Leftrightarrow g'(x) = 2g(x) - 1$

$\Leftrightarrow$ g est une solution de l'équation différentielle : $y' = 2y - 1$

c)
g est une solution de l'équation différentielle : $y' = 2y - 1$

$\Rightarrow g(x) = ke^{2x} + \frac{1}{2}$ et $g(x) \neq 0$; $\forall x \in IR$

$\Rightarrow g(x) = ke^{2x} + \frac{1}{2}$ avec $k \in IR_+$

$\Rightarrow f(x) = \frac{2}{2ke^{2x}+1}$ avec $k \in IR_+$

* Réciproquement

$f(x) = \frac{2}{2ke^{2x}+1}$; $k \in IR_+$

f est dérivable sur IR et ne s'annule pas sur IR

$f'(x) = \frac{-8ke^{2x}}{(2ke^{2x}+1)^2}$

$f'(x) + 2f(x) = \frac{4}{(2ke^{2x}+1)^2} = f^2(x)$

Conclusion : E est l'ensemble des fonctions définies sur IR par :

$f(x) = \frac{2}{2ke^{2x}+1}$; $k \in IR_+$

EXERCICE 9 :

1) $\begin{cases} y'(t) = k\,y(t) \\ y(0) = N \end{cases}$; $k > 0$

d'où $y(t) = N\,e^{kt}$

2) $y(2) = 4y(0)$

$\Rightarrow N\,e^{2k} = 4N \Rightarrow e^{2k} = 4$

$\Rightarrow 2k = 2Ln2 \Rightarrow k = Ln2$ d'où

$y(t) = N\,e^{tLn2} = N \times 2^t$

d'où $y(3) = 8.N$

3) $y(5) = 6400$

$\Rightarrow N \times 2^5 = 6400 \Rightarrow N = 200$

EXERCICE 10 :

$f(x) = e^{-x}.\sin x$

1) – a) $f'(x) = (\cos x - \sin x)\,e^{-x}$

$\cos x - \sin x = r.\cos(x - \varphi)$

Avec $\begin{cases} r = \sqrt{2} \\ \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \varphi \equiv -\frac{\pi}{4}\,(2\pi)$

D'où : $f'(x) = [\sqrt{2}.\cos(x + \frac{\pi}{4})].e^{-x}$

$f'(x) = \sqrt{2}.e^{-x}.\cos(x + \frac{\pi}{4})$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π
$\cos(x+\frac{\pi}{4})$	+	0	-	0	+

$S_{[0,2\pi]} = [0, \frac{\pi}{4}[\cup]\frac{5\pi}{4}, 2\pi]$

c) $f'(x) = \sqrt{2}.e^{-x}.\cos(x + \frac{\pi}{4})$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}$	2π
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	0 ↗	$\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$ ↘	$-\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{5\pi}{4}}$ ↗	0

$T_0 : y = x$

$T_{2\pi} : y = e^{-2\pi}(x - 2\pi)$

2) – a) * $(\mathcal{C}_1) \cap (\mathcal{C})$?

$\begin{cases} f(x) = e^{-x} \\ x \in [0,2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ x \in [0,2\pi] \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ alors $(\mathcal{C}_1) \cap (\mathcal{C})$ est le point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$

* $(\mathcal{C}_2) \cap (\mathcal{C})$?

$$\begin{cases} f(x) = -e^{-x} \\ x \in [0,2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = -1 \\ x \in [0,2\pi] \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2}$

alors $(\mathcal{C}_2) \cap (\mathcal{C})$ est le point d'abscisse $\frac{3\pi}{2}$

b) $g(x) = e^{-x} \Rightarrow g'(x) = -e^{-x}$

$g'(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$; $f'(\frac{\pi}{2}) = -e^{-\frac{\pi}{2}}$

$f(\frac{\pi}{2}) = g(\frac{\pi}{2}) = e^{-\frac{\pi}{2}}$ d'où $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_1)$ ont la même tangente en $A(\frac{\pi}{2}, e^{-\frac{\pi}{2}})$

* de même pour $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_1)$

3) – a) $f(x) = e^{-x} \cdot \sin x$

$f'(x) = (\cos x - \sin x)\, e^{-x}$

$f''(x) = -2\, e^{-x} \cdot \cos x$

vérifier que : $f''(x) + 2f'(x) + 2f(x) = 0$

b) Rq : $f(x) \geq 0$; $\forall x \in [0,\pi]$

$\mathcal{A} = \int_0^{\pi} f(x)dx$

$\mathcal{A} = \int_0^{\pi} (-\frac{1}{2}f'(x) - f'(x))dx$

$\mathcal{A} = [-\frac{1}{2}f'(x) - f(x)]_0^{\pi} = \frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})$ u.a

$\mathcal{A} = 20\,[\frac{1}{2}(1 + e^{-\pi})]$ cm^2

$\mathcal{A} = 10\,[(1 + e^{-\pi})]$ cm^2

EXERCICE 11 :

(E) : $y' + 2y = x^2$

1) (E_0) : $y' = -2y$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur IR par : $h(x) = ke^{-2x}$; $k \in IR$

2) $g(x) = ax^2 + bx + c$

$g'(x) = 2ax + b$

$g'(x) + 2g(x) = x^2$

$\Leftrightarrow 2ax + b + 2ax^2 + 2bx + 2c = x^2$

$\Leftrightarrow (2a - 1)x^2 + 2(a + b)x + (b + 2c) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a - 1 = 0 \\ 2(a + b) = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{cases}$$

d'où $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ est la solution de (E)

3) f solution de (E)

$\Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = x^2$

$\Leftrightarrow f'(x) + 2f(x) = g'(x) + 2g(x)$

$\Leftrightarrow (f - g)'(x) + 2(f - g)(x) = 0$

$\Leftrightarrow (f - g)$ est une solution de (E_0)

4) f solution de (E)

$\Leftrightarrow (f - g)$ est une solution de (E_0)

$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = ke^{-2x}$; $k \in IR$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + ke^{-2x}$; $k \in IR$

Les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par :

$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} + ke^{-2x}$; $k \in IR$

EXERCICE 12 :

(E) : $y' - y = 4\cos x$

1) (E_0) : $y' = y$

Les solutions de (E_0) sont les fonctions définies sur IR par : $h(x) = k.e^x$; $k \in IR$

2) $g(x) = a\cos x + b\sin x$

$g'(x) = -a\sin x + b\cos x$

g est une solution de (E)

$\Leftrightarrow g'(x) - g(x) = 4\cos x$

$\Leftrightarrow (a - b + 4).\cos x + (a + b).\sin x = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a - b + 4 = 0 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \end{cases}$

d'où : $g(x) = -2\cos x + 2\sin x$ est une solution de (E)

3) f est une solution de (E)

$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = 4\cos x$

$\Leftrightarrow f'(x) - f(x) = g'(x) - g(x)$

$\Leftrightarrow (f - g)'(x) - (f - g)(x) = 0$

$\Leftrightarrow (f - g)$ est une solution de (E_0)

4) f est une solution de (E)

$\Leftrightarrow (f - g)$ est une solution de (E_0)

$\Leftrightarrow f(x) - g(x) = k.e^x$; $k \in IR$

$\Leftrightarrow f(x) = g(x) + k.e^x$; $k \in IR$

$\Leftrightarrow f(x) = -2\cos x + 2\sin x + k.e^x$; $k \in IR$

EXERCICE 13 :

$L.y' + r.y = E$

1) $\begin{cases} (0,2)y' + 100.y = 10 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y' = -500y + 50 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

d'où : $i(t) = (\frac{-50}{500})e^{-500t} + \frac{50}{500}$

$i(t) = (\frac{-1}{10})e^{-500t} + \frac{1}{10}$

2) * $\lim_{x \to +\infty} i(t) = \frac{1}{10} = 0,1$

* interprétation : La bobine s'oppose à L'établissement du courant dans le circuit Et ce conformément à la loi de LORENS Quant le régime permanent s'installe i devient constant : $i = I_{permanant}$ (=0,1 ici)

EXERCICE 14 :

1) $\begin{cases} y'' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = \sqrt{2} \end{cases}$

la solution est la fonction définie sur IR par : $f(x) = \sin(\sqrt{2}x) + \cos(\sqrt{2}x)$

2) $\begin{cases} y'' + 16y = 0 \\ y(\pi) = -1 \\ y'(\pi) = -2 \end{cases}$ $w = 4$

$f(x) = A\sin(4x) + B\cos(4x)$; $(A,B) \in IR^2$

$f'(x) = 4A\cos(4x) - 4B\sin(4x)$

$\begin{cases} f(\pi) = -1 \\ f'(\pi) = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ 4A = -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} B = -1 \\ A = \frac{-1}{2} \end{cases}$

D'où la solution de est la fonction définie sur IR par : $f(x) = \frac{-1}{2}\sin(4x) - \cos(4x)$

3) même travail que pour 2)

EXERCICE 15 :

(E) : $y'' = 2y'$

1) on pose $\mathfrak{z} = y'$

L'équation devient : $\mathfrak{z}' = 2\mathfrak{z}$

Les solutions sont : $h(x) = ae^{2x}$; $a \in IR$

D'où les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par :

$$f(x) = \frac{a}{2}e^{2x} + b \; ; (a,b) \in IR^2$$

2) $f(x) = \frac{a}{2}e^{2x} + b$

$f'(x) = ae^{2x}$

$$\begin{cases} f(0) = 2 \\ f'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2} + b = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{3}{2} \\ a = 1 \end{cases}$$

d'où : $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 3)$

EXERCICE 16 :

(E) : $y'' = -3y' + 1$

1) on pose $\mathfrak{z} = y'$

L'équation devient : (E') : $\mathfrak{z}' = 3\mathfrak{z} + 1$

Les solutions de (E') sont :

$h(x) = ae^{-3x} + \frac{1}{3}$; $a \in IR$

D'où les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par :

$$f(x) = -\frac{a}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}x + b \; ; (a,b) \in IR^2$$

2) $f(x) = -\frac{a}{3}e^{-3x} + \frac{1}{3}x + b$

$f'(x) = a\,e^{-3x} + \frac{1}{3}$

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a}{3} + b = 0 \\ a + \frac{1}{3} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b = \frac{-1}{9} \\ a = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

d'où : $f(x) = \frac{1}{9}e^{-3x} + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}$

EXERCICE 17 :

1) $y'' + 16y = 0$

les solutions sont les fonctions définies sur IR par :

$f(x) = A\sin(4x) + B\cos(4x)$;

$(A,B) \in IR^2$

2) $f(x) = \sin(4x) + \cos(4x)$

3) $f(t) = \cos(4t) + \sin(4t)$

$= \sqrt{2}.\cos(4t - \varphi)$

Avec $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $\varphi = \frac{\pi}{4}(2\pi)$

D'où : $f(t) = \sqrt{2}.\cos(4t - \frac{\pi}{4})$

$(a = 4 \; ; \; b = \frac{\pi}{4})$

4)

$\bar{f} = \frac{8}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{8}} f(t)dt = \frac{8}{\pi}[\frac{\sqrt{2}}{4}.\sin(4t - \frac{\pi}{4})]_0^{\frac{\pi}{8}}$

$= \frac{8}{\pi}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$; $\boxed{\bar{f} = \frac{4}{\pi}}$

EXERCICE 18 :

1) $y'' + y' = 0 \Leftrightarrow y'' = -y'$

on pose $\mathfrak{z} = y'$

L'équation devient : $\mathfrak{z}' = -\mathfrak{z}$

$\mathfrak{z} = a\,e^{-x}$; $a \in IR$

D'où : $y = -a\,e^{-x} + b$; $(a,b) \in IR^2$

les solutions sont les fonctions définies sur IR par :

$f(x) = -a\,e^{-x} + b$; $(a,b) \in IR^2$

2) les solutions de l'équation :

$y''' + y'' = 0$ sont les fonctions définies sur IR par :

$g(x) = a\,e^{-x} + b\,x + c$; $(a,b,c) \in IR^3$

EXERCICE 19:

1) $\text{Cos}^4(x)=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^4$

$=\frac{1}{16}.[e^{4ix}+4e^{i3x}.e^{-ix}+6e^{i2x}e^{-2ix}+4^{cix}e^{-3ix}+e^{-4ix}]$

$=\frac{1}{16}[(e^{4ix}+e^{-4ix})+4(e^{2ix}+e^{-2ix})+6]$

$=\frac{1}{16}[2\cos(4x)+8\cos(2x)+6]$

$\text{Cos}^4(x)=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}$

2) (E) : $y''+y=\cos^4(x)$

$g(x)=a.\cos(4x)+b.\cos(2x)+c$

$g'(x)=-4a\sin(4x)-2b\sin(2x)$

$g''(x)=-16a\cos(4x)-4b\cos(2x)$

g est une solution de (E) $\Leftrightarrow$

$g''(x)+g(x)=\cos^4(x)\Leftrightarrow$

$-16a\cos(4x)-4b\cos(2x)+a\cos(4x)+b\cos(2x)+c=\cos(4x) \Leftrightarrow$

$-15a\cos(4x)-3b\cos(2x)+c=\frac{1}{8}\cos(4x)+\frac{1}{2}\cos(2x)+\frac{3}{8}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}-15a=\frac{1}{8}\\-3b=\frac{1}{2}\\c=\frac{3}{8}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=-\frac{1}{120}\\b=-\frac{1}{6}\\c=\frac{3}{8}\end{cases}$

D'où $g(x)=-\frac{1}{120}\cos(4x)-\frac{1}{6}\cos(2x)+\frac{3}{8}$

3) f solution de (E)$\Leftrightarrow f''(x)+f(x)=\cos^4(x)$

$\Leftrightarrow f''(x)+f(x)=g''(x)+g(x)$

$\Leftrightarrow (f-g)''(x)+(f-g)(x)=0$

$\Leftrightarrow$f-g est une solution de l'éq :$y''+y=0$

4) *f solution de (E)$\Leftrightarrow$f-g solution de $y''+y=0$

$\Leftrightarrow f(x)-g(x)=A.\sin(x)+B.\cos(x)$ AetB réels

$\Leftrightarrow f(x)=A.\sin(x)+B.\cos(x)+g(x)$

$\Leftrightarrow f(x)=A.\sin(x)+B.\cos(x)-\frac{1}{120}\cos(4x)-\frac{1}{6}\cos(2x)+\frac{3}{8}$

* f solution de (E) et $f(0)=1$ et $f'(0)=0$

$f'(x)=A.\cos(x)-B.\sin(x)+\frac{1}{30}\sin(4x)+\frac{1}{3}\sin(2x)$

$\begin{cases}f(0)=1\\f'(0)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}B-\frac{1}{120}-\frac{1}{6}+\frac{3}{8}=1\\A=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}A=0\\B=\frac{4}{5}\end{cases}$

D'où

$f(x)=\frac{4}{5}\cos(x)-\frac{1}{120}\cos(4x)-\frac{1}{6}\cos(2x)+\frac{3}{8}$

EXERCICE 20 :

(E) : $4y''+\pi^2 y=0$

1) (E) : $y'' + (\frac{\pi}{2})^2 y = 0$

Les solutions sont :

$f(x) = A\sin(\frac{\pi}{2}x) + B\cos(\frac{\pi}{2}x)$;

$(A,B) \in IR^2$

2) $\begin{cases} N(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) \in (C_g) \\ T_N \,//\, (o,\vec{i}\,) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ g'(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases}$

$g(x) = A\sin(\frac{\pi}{2}x) + B\cos(\frac{\pi}{2}x)$

$g'(x) = A\frac{\pi}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x) - B\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)$

$\begin{cases} g(\frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ g'(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A\frac{\sqrt{2}}{2} + B\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ A\frac{\pi\sqrt{2}}{4} - B\frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = 0 \end{cases} \Leftrightarrow A = B = \frac{1}{2}$

D'où : $g(x) = \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x) + \frac{1}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x)$

3) $g(x) = \frac{1}{2}[\sin(\frac{\pi}{2}x) + \cos(\frac{\pi}{2}x)]$

$g(x) = \frac{1}{2}[\sqrt{2}.\cos(\frac{\pi}{2}x - \varphi)]$

Avec $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \quad \varphi = \frac{\pi}{4}(2\pi)$

D'où : $g(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{4})$

EXERCICE 21 :

R. $q'(t) + \frac{1}{C}q(t) = u$

$q(0) = 0$

1) (E) : R. $y' + \frac{1}{C}y = u$

2) (E) : $y' = -\frac{1}{RC}y + \frac{u}{R}$

D'où :

$q(t) = k.e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{\frac{u}{R}}{\frac{1}{RC}}$; $k \in IR$

$q(t) = k.e^{-\frac{t}{RC}} + uc$; $k \in IR$

$q(0) = 0 \Rightarrow k + cu = 0 \Rightarrow k = -cu$

D'où :

$q(t) = -cu.e^{-\frac{t}{RC}} + cu$

$q(t) = cu - cu.e^{-\frac{t}{RC}}$

3)

$i(t) = q'(t) = \frac{u}{R}.e^{-\frac{t}{RC}}$

EXERCICE 22 :

(E) : $f(x) = \int_0^x f(t)dt + x$

1) f est continue sur IR et $0 \in IR$

D'où la fonction : $x \mapsto \int_0^x f(t)dt$ est dérivable sur IR et sa dérivée est la fonction : $x \mapsto f(x)$

D'où la fonction : $f(x) = \int_0^x f(t)dt + x$ est dérivable sur IR comme étant somme de deux fonctions dérivables

2) – a) f solutions de (E)

$\Rightarrow f(x) = \int_0^x f(t)dt + x$

$\Rightarrow f'(x) = f(x) = 1$

$\Rightarrow$ f est solution de l'équation :

(E') : $y' = y + 1$

b) réciproquement :
g est solution de (E´) $\Rightarrow$ g´(t) = g(t) + 1
$\Rightarrow \int_0^x g'(t)dt = \int_0^x g(t)dt + \int_0^x dt$

$\Rightarrow [g(t)]_0^x = \int_0^x g(t)dt + x$

$\Rightarrow g(x) - g(0) = \int_0^x g(t)dt + x$

g est solution de(E) lorsque $\boxed{g(0) = 0}$

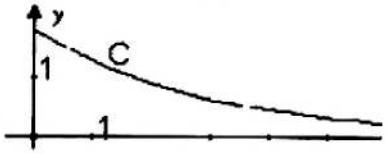
3) les solutions de (E) sont celles de (E´) vérifiant f(0) = 0
d'où : $f(x) = e^x - 1$
est la seule solution de (E)

EXERCICE 23 :

Q´(t) = - α Q(t)
1) – a) Q est solution de l'équation différentielle : y´ = - αy et Q(0) = 1,8
D'où :
$Q(t) = 1{,}8\, e^{-\alpha t}$
b) $Q(1) = 1{,}8 - \frac{30}{100}(1{,}8)$
Q(1) = 1,26
$\Rightarrow 1{,}8\, e^{-\alpha t} = 1{,}26$
$\Rightarrow \boxed{e^{-\alpha t} = 0{,}7}$

c) $f(x) = e^{-x}$; $f'(x) = -e^{-x} < 0$
f est continue et strictement décroissante sur IR , elle réalise donc une bijection de IR sur IR
Comme (0,7) ∈ IR alors il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 0{,}7 \Leftrightarrow e^{-\alpha} = 0{,}7$

* $g(x) = e^{-x} - 0{,}7$
$g(0) \times g(1) < 0 \Rightarrow 0 < \alpha < 1$
calculatrice $\Rightarrow 0{,}3566 < \alpha < 0{,}3567$
2) α ≈ 0,35665
$Q(t) = 1{,}8\, e^{-0{,}35665t}$
$Q'(t) = -0{,}35665 \times 1{,}8 e^{-0{,}35665t} < 0 \Rightarrow$ Q est décroissante et $\lim_{t \to +\infty} Q(t) = 0$



3) – a) $R_1 = 1{,}8 + Q(1)$
$= 1{,}8 + (1{,}8).e^{-\alpha} = 3{,}06$

$R_1 = 1{,}8 + (1{,}8) \times (0{,}7)$

b) $R_2 = 1{,}8 + R_1.e^{-\alpha}$
$R_2 = (1{,}8) + (0{,}7)\, R_1 = 3{,}942$

c) $R_{n+1} = 1{,}8 + (0{,}7)\, R_n$

d) Démonstration par récurrence :
* pour n = 0
$R_0 = (1{,}8) = 6 \times (0{,}3) = 6[1 - (0{,}7)^1]$

(Vrai)
* supposons que : $R_n = 6[1 - (0{,}7)^{n+1}]$

Montrons que : $R_{n+1} = 6[1 - (0{,}7)^{n+2}]$

$R_{n+1} = 1{,}8 + (0{,}7)\, R_n$
$R_{n+1} = 1{,}8 + 6.(0{,}7)\,[1 - (0{,}7)^{n+1}]$
$= 1{,}8 + 6[(0{,}7) - (0{,}7)^{n+2}]$
$= 6[0{,}3 + (0{,}7) - (0{,}7)^{n+2}]$
$= 6[1 - (0{,}7)^{n+2}]$
* conclusion
$R_n = 6[1 - (0{,}7)^{n+1}] \quad \forall n \in IN$

e) $\lim_{x \to +\infty} (0{,}7)^{n+1} = 0$
d'où :
$\lim_{x \to +\infty} Rn = 6$

EXERCICE 24 :

(I) : y´ = 2y
(II) : y´ = y
1) * les solutions de l'équation (I) sont les fonctions définies sur IR par :
$g(x) = k.e^{2x}$; ∀ k ∈ IR

* les solutions de l'équation (II) sont les fonctions définies sur IR par :
$h(x) = k'.e^x$; ∀ k´ ∈ IR
2) f(x) = f1(x) – f2(x)
a) f(0) = 1 car A(0,1) ∈ (C_f)

f´(0) = 3 (coefficient directeur de T)

b) $f(x) = k.e^{2x} - k'.e^{x}$

$f'(x) = 2k.e^{2x} - k'.e^{x}$

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k - k' = 1 \\ 2k - k' = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k' = 1 \end{cases}$$

d'où $f(x) = 2e^{2x} - e^{x}$

$f_1(x) = 2e^{2x}$; $f_2(x) = e^{x}$

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (2e^{2x} - e^{x}) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^{x}(2e^{x} - 1) = +\infty$

d) $f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x}(2e^{x} - 1) = 0$

$\Leftrightarrow 2e^{x} - 1 = 0$ car $e^{x} \neq 0$

$\Leftrightarrow e^{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = -\text{Ln}2$

$(\mathcal{C}_f) \cap (o,\vec{i})$ est le point d'abscisse $(-\text{Ln}2)$

3) $t < -\text{Ln}2$

a) $\mathcal{A}(t) = -\int_t^{-\text{Ln}2} f(x)dx = \int_{-\text{Ln}2}^{t} f(x)dx$

$= [e^{2x} - e^{x}]_{-Ln2}^{t}$

$\mathcal{A}(t) = (e^{2t} - e^{t} + \frac{1}{4})$ u.a

b) * $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathcal{A}(t) = \frac{1}{4}$

* $\int_{-\text{Ln}2}^{0} f(t)dt = [e^{2t} - e^{t}]_{-Ln2}^{0} = \frac{1}{4}$

D'où : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathcal{A}(t) = \int_{-\text{Ln}2}^{0} f(t)dt$

* $B = \int_{-\text{Ln}2}^{0} f(t)dt$: représente l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -\text{Ln}2$ et $x = 0$

lorsque $t \longrightarrow -\infty$, $\mathcal{A}(t) \longrightarrow B$

EXERCICE 25 :

1) – a) (E) : $y' = -\frac{3}{4}y$

Les solutions sont les fonctions définies sur IR par : $h(x) = k.e^{-\frac{3}{4}x}$; $k \in IR$

b) $f(x) = k.e^{-\frac{3}{4}x}$; $k \in IR$

$f'(x) = -\frac{3}{4}k.e^{-\frac{3}{4}x}$; $k \in IR$

$f'(0) = -6 \Longrightarrow -\frac{3}{4}k = -6 \Longrightarrow k = 8$

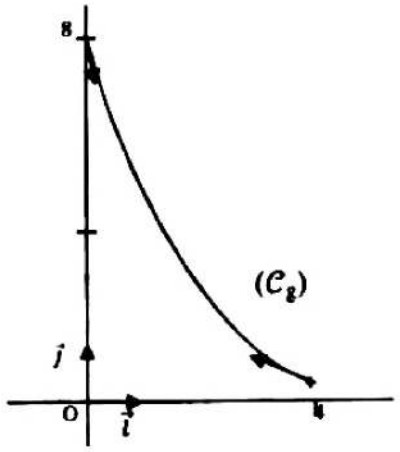
d'où :

$f(x) = 8\,e^{-\frac{3}{4}x}$

2) – a) $g(x) = 8\,e^{-\frac{3}{4}x}$; $x \in [0,4]$

$g'(x) = -6\,e^{-\frac{3}{4}x}$

x	0	4
$g'(x)$	-	
$g(x)$	8 ↘	$\frac{8}{e^3}$



b) $V = \pi.\int_0^4 g^2(x)dx$

$V = \pi.\int_0^4 64.e^{-\frac{3}{2}x}dx = 64.\pi\,[-\frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}x}]_0^4$

$V = \frac{128}{3}(1 - \frac{1}{e^6})\pi$ (u.v)

Remarque : lorsque : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ cm

$V = \frac{128}{3}(1 - \frac{1}{e^6})\pi$ cm^3

EXERCICE 26 :

$m(0) = 300$

(E) : $y' = -\frac{1}{5}y$

1) – a) les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par : $f(x) = k.e^{-\frac{1}{5}x}$; $k \in IR$

b) $m(t) = k.e^{-\frac{t}{5}}$; $k \in IR$

$m(0) = 300 \Rightarrow k = 300$

d'où $m(t) = 300\, e^{-\frac{t}{5}} = 300\, e^{-0,2t}$

2) $m(t_0) = 150 \Leftrightarrow 300\, e^{-\frac{t_0}{5}} = 150$

$\Leftrightarrow e^{-\frac{t_0}{5}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{t_0}{5} = -\text{Ln}2$

$\Leftrightarrow \boxed{t_0 = 5\,\text{Ln}2}$

3) $m(t) \leq 10^{-2} \Leftrightarrow e^{-\frac{t}{5}} \leq \frac{1}{30000}$

$\Leftrightarrow -\frac{t}{5} \leq -\text{Ln}(30000) \Leftrightarrow t \geq 5\text{Ln}(30000)$

EXERCICE 27 :

$g(x) = \cos x - \sin x$

1) $g'(x) = -\sin x - \cos x$
$= -\sin(\pi - x) + \cos(\pi - x)$
$= \cos(\pi - x) - \sin(\pi - x)$
$= g(\pi - x)$

2) $f'(x) = f(\pi - x)$

a) * la fonction : $x \mapsto \pi - x$ est dérivable sur IR , comme f est dérivable sur IR , la fonction : $x \mapsto f(\pi - x)$ est dérivable sur IR par suite f ′ est dérivable sur IR
d'où f est deux fois dérivable sur IR

* $f'(x) = f(\pi - x) \Rightarrow f''(x) = -f'(\pi - x)$
$\Rightarrow f''(x) = -f[\pi - (\pi - x)]$
$\Rightarrow f''(x) = -f(x)$
$\Rightarrow f''(x) + f(x) = 0$

D'où f est solution de l'équation : $y'' + y = 0$

b) $f(x) = A\sin x + B\cos x$
$(A,B) \in IR^2$

EXERCICE 28 :

Partie A

(E) : $y' - 2y = -\frac{2}{1+e^{-2x}}$

1) la solution de l'équation : $y' = 2y$ qui prend la valeur 1 en 0 est $h(x) = e^{2x}$

2) $f(0) = \text{Ln}2$
$f(x) = e^{2x}.g(x)$

a) $f(0) = e^0.g(0) \Rightarrow g(0) = f(0) = \text{Ln}2$

b) $f'(x) = 2e^{2x}.g(x) + e^{2x}.g'(x)$

$f'(x) = e^{2x}.[2g(x) + g'(x)]$

c) f est solution de (E)

$\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow f'(x) - 2f(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow 2e^{2x}.g(x) + e^{2x}.g'(x) - 2e^{2x}.g(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow e^{2x}.g'(x) = \frac{-2}{1+e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow g'(x) = \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$\Leftrightarrow g(x) = \text{Ln}(1 + e^{-2x}) + k$; $k \in IR$

$g(0) = \text{Ln}2 \Rightarrow k = 0$

d'où : $g(x) = \text{Ln}(1 + e^{-2x})$

et $f(x) = e^{2x}\,\text{Ln}(1 + e^{-2x})$

Partie B

$f(x) = e^{2x}\,\text{Ln}(1 + e^{-2x})$

1) $h(x) = \text{Ln}(1 + e^{-2x}) - \frac{1}{e^{2x}+1}$

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x)$
$= \lim\limits_{x \to +\infty} \text{Ln}(1 + e^{-2x}) - \frac{1}{e^{2x}+1}$ (avec $e^{-2x} \to 0$ et $\frac{1}{e^{2x}+1} \to 0$)
$= \text{Ln}\,1 = 0$

b) $h'(x) = \frac{-2}{(e^{2x}+1)^2} < 0$

h est strictement décroissante sur IR

c) $\lim_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$

h est strictement décroissante sur IR
d'où : $h(IR) =]\lim_{x \to +\infty} h(x), \lim_{x \to -\infty} h(x)[$

$=]0, +\infty[$

d'où : $h(x) > 0$; $\forall x \in IR$

2) $f'(x) = 2e^{2x}\ h(x)$
D'où f ′ et h sont de même signe.

3) $* \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{Ln(1+e^{-2x})}{e^{-2x}}$

On pose : $X = e^{-2x}$ alors $\lim_{X \to 0} \frac{Ln(1+X)}{X} = 1$

$* f(x) = e^{2x}.\ Ln[e^{-2x}(1 + e^{2x})]$

$= e^{2x}.[Lne^{-2x} + Ln(1 + e^{2x})]$

$= e^{2x}.[-2x + Ln(1 + e^{2x})]$

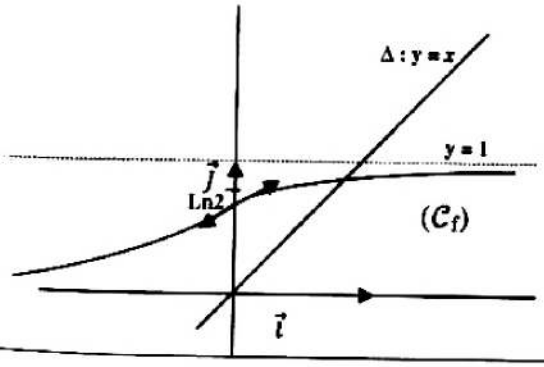
$* \lim_{x \to -\infty} f(x) =$
$= \lim_{x \to -\infty} (-2xe^{2x} + e^{2x}Ln(1 + e^{2x})) = 0$

4) $f'(x) = 2e^{2x}\ h(x) > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	1

5) T : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

T : $y = (2Ln2 - 1)x + Ln2$



Partie C

1) $u(x) = \frac{1}{1+e^{-2x}} = \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}}$

Une primitive de u sur IR est :
$U(x) = \frac{1}{2}Ln(1 + e^{2x})$

2) $\mathcal{A} = \int_{-1}^{0} f(x)dx$
$= \int_{-1}^{0} e^{2x}Ln(1 + e^{-2x})dx$

$e^{2x} \xrightarrow{P} \frac{1}{2}e^{2x}$

$Ln(1 + e^{-2x}) \xrightarrow{d} \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$\mathcal{A} =$
$[\frac{1}{2}e^{2x}Ln(1 + e^{-2x})]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{1}{1+e^{-2x}}dx$
$= \frac{Ln2}{2} - \frac{1}{2e^2}Ln(1 + e^2) + \left[\frac{1}{2}Ln(1 + e^{2x})\right]_{-1}^{0}$

$= Ln2 - \frac{1}{2e^2}Ln(1 + e^2) - \frac{1}{2}Ln(1 + e^{-2})$ u.a

$\mathcal{A} = 25[Ln2 - \frac{1}{2e^2}Ln(1 + e^2) - \frac{1}{2}Ln(1 + e^{-2})$ cm^2

$\mathcal{A}$ = ...calculatrice

Partie D

$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

1) f est continue et strictement croissante sur [0,1] d'où :
$f([0,1]) = [f(0), f(1)]$
$= [Ln2, e^2Ln(1 + e^{-2})]$

$Ln2 \geq 0$ et $f(1) \leq 1$ d'où :
$f([0,1]) \subset [0,1]$
* Démonstration par récurrence

* $U_0 = 0 \in [0,1]$ (vrai)

* supposons que : $U_n \in [0,1]$
montrons que : $U_{n+1} \in [0,1]$
$U_n \in [0,1] \Rightarrow f(U_n) \in f([0,1])$
$\Rightarrow f(U_n) \in [0,1]$
$\Rightarrow U_{n+1} \in [0,1]$

Car $f([0,1]) \subset [0,1]$
Conclusion : $U_n \in [0,1]$; $\forall n \in IN$

2) * $U_0 = 0$ et $U_1 = f(U_0) = Ln2$
$U_0 \leq U_1$ (vrai)

* supposons que : $U_n \leq U_{n+1}$
montrons que : $U_{n+1} \leq U_{n+2}$

$U_n \leq U_{n+1} \Rightarrow f(U_n) \leq f(U_{n+1})$ car f est croissante
$\Rightarrow U_{n+1} \leq U_{n+2}$
Conclusion :
(U_n) est croissante

* (U_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers un réel α

3) $U_{n+1} = f(U_n)$; $U_n \in [0,1]$

f est continue sur $[0,1]$ d'où : $\alpha = f(\alpha)$
$U_n \in [0,1] \Rightarrow \alpha \in [0,1]$

$f(0) \neq 0$ et $f(1) \neq 1 \Rightarrow \alpha \in]0,1[$

4) $\Delta : y = x$

$(\mathcal{C}_f) \cap \Delta = \{ A(\alpha , \alpha)\}$; $\alpha \approx 0,8$ (gr^t)

EXERCICE 29 :

$\theta_0 = 30°C$
$\theta'(t) = k[T - \theta(t)]$
$k = 0,1$; $\theta(0) = 30$
1) θ vérifie l'équation différentielle :
$y' = (0,1) [T - y]$ et $\theta(0) = 30$
2) $T = 100$
a) (E) : $y' = (0,1) [100 - y]$
(E) : $y' = - (0,1) . y + 10$ et $\theta(0) = 30$
D'où :

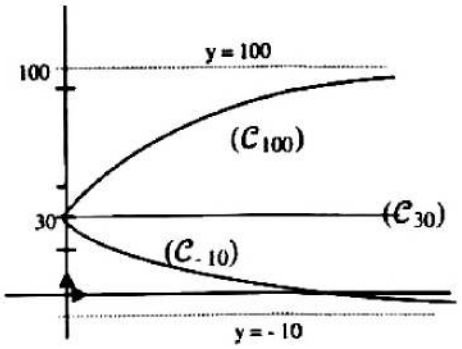
$$\theta(t) = (30 - \frac{10}{0,1})e^{-0,1t} + \frac{10}{0,1}$$

$$\boxed{\theta(t) = - 70\, e^{-0,1t} + 100}$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \theta(t) = 100$
Interprétation :

Lorsque le corps reste beaucoup de temps sa température sera 100°C
3)
$\theta(t) = - 70\, e^{-0,1t} + 100$
$\theta'(t) = 7\, e^{-0,1t} > 0$

t	0	+∞
$\theta'(t)$	+	
$\theta(t)$	30 ↗	100



b) $T = 30$
$\theta(t) = 30$ constante
c) $T = - 10$

$\theta(t) = (30 +10)e^{-0,1t} - 10$

$$\theta(t) = 40\, e^{-0,1t} + \frac{10}{0,1}$$
$\theta'(t) = - 4\, e^{-0,1t} < 0$

t	0	+∞
$\theta'(t)$	-	
$\theta(t)$	30 ↘	- 10

EXERCICE 30 :

$\theta(0) = 0$

$\theta'(t) + (0,1)\theta(t) = 2$

1) θ est une solution de l'équation différentielle : $y' = -(0,1).y + 2$ et $\theta(0) = 0$

D'où :

$$\theta(t) = -20\,e^{-0,1t} + 20$$

2) – a) $\theta(10) = (20 - \frac{20}{e})$ °C

$\theta(60) = (20 - \frac{20}{e^6})$ °C

b)

$$\lim_{x \to +\infty} \theta(t) = 20$$

Pour t assez grand , la température du conducteur tend vers 20°C

EXERCICE 31 :

Partie A

$$f(x) = \frac{3e^{x/5}}{e^{x/5} + 2}$$

1)

$$f'(x) = \frac{\frac{6}{5}e^{x/5}}{(e^{x/5}+2)^2} > 0$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{3}{1 + e^{\frac{-x}{5}}} = 3 \quad (e^{\frac{-x}{5}} \to 0)$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	0 ↗	3

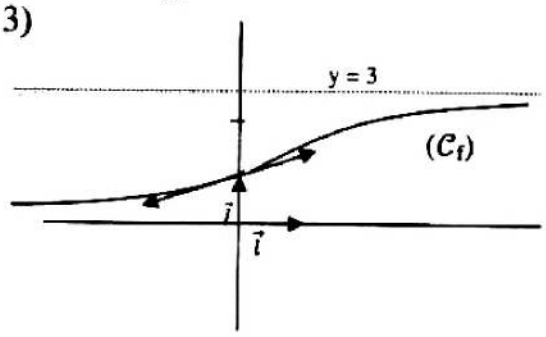
Les droites d'équations respectives :

$Y = 0$ et $y = 3$ sont des assymptôtes à $(\mathcal{C})$

2) $T : y = f'(0).(x - 0) + f(0)$

$$T : y = \frac{2}{15}x + 1$$

3)



4) – a) $F(x) = 15.\text{Ln}(2 + e^{\frac{x}{5}}) + k$; $k \in \mathbb{R}$

$F(0) = 0 \Rightarrow k = -15\text{Ln}3$

D'où : $F(x) = 15.\text{Ln}(2 + e^{\frac{x}{5}}) - 15\text{Ln}3$

$$F(x) = 15.\text{Ln}\left(\frac{2 + e^{x/5}}{3}\right)$$

b) $\mathcal{A} = \int_0^5 f(x)dx = [F(x)]_0^5$

$= F(5) - F(0)$

$$\boxed{\mathcal{A} = 15\ \text{Ln}\left(\frac{2+e}{3}\right)}\ \text{u.a}$$

Partie B

1) (I) : $g' = \frac{1}{5}g$

a) les solutions de (I) sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = k\,e^{x/5}$; $k \in \mathbb{R}$

b) $g(0) = 1 \Rightarrow k = 1$

d'où : $g(t) = e^{t/5}$; $t \in [0,+\infty[$

2) (II) : $g' = \frac{g}{5} - \frac{g^2}{15}$

a) $h = \frac{g}{3-g}$ h solution de (I) $\Leftrightarrow h' = \frac{h}{5}$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{g}{3-g}\right)' = \frac{g}{5(3-g)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{g'(3-g)+g'g}{(3-g)^2} = \frac{g}{5(3-g)} \Leftrightarrow \frac{3g'}{3-g} = \frac{g}{5}$$

$$\Leftrightarrow 3g' = \frac{3}{5}g - \frac{g^2}{5} \Leftrightarrow g' = \frac{g}{5} - \frac{g^2}{15}$$

$\Leftrightarrow$ g est solution de (II)

b) $h(x) = ke^{\frac{x}{5}}$; $k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{g(x)}{3-g(x)} = ke^{\frac{x}{5}}$$

$$\Leftrightarrow g(x) = \frac{3e^{\frac{x}{5}}}{1-ke^{\frac{x}{5}}} \quad ; k \in \mathbb{R}$$

c) $g(0) = 1 \Rightarrow \frac{3k}{1+k} = 1 \Rightarrow k = \frac{1}{2}$

d'où : $g(x) = \frac{3e^{\frac{x}{5}}}{2-e^{\frac{x}{5}}} = f(x)$

d) $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$ la population tend vers 3 milliers.

EXERCICE 32 :

(E) : $y'' + \frac{1}{Lc} y = 0$

$C = 1{,}25 \times 10^{-3}$
$L = 0{,}5 \times 10^{-2}$

1) les solutions de (E) sont les fonctions définies sur IR par :

$f(x) = A \cos(\frac{x}{\sqrt{Lc}}) + B \sin(\frac{x}{\sqrt{Lc}})$;

$(A,B) \in IR^2$

$Lc = (0{,}0625) \times 10^{-4}$

$\sqrt{Lc} = (0,25) \times 10^{-2}$

$\frac{1}{\sqrt{Lc}} = 400$; d'où :

$f(x) = A \cos(400x) + B \sin(400x)$;

$(A,B) \in IR^2$

2) $q(0) = 6 \times 10^{-3}$

$q'(0) = 0$

d'où : $q(t) = 6 \times 10^{-3} \cos(400t)$;

$t \in [0, +\infty]$

$q(t) = (0{,}006). \cos(400t)$

3) $i(t) = -q'(t)$

a) $q(t) = (0{,}006). \cos(400t)$

d'où : $i(t) = -q'(t)$

$\boxed{i(t) = (2{,}4). \sin(400t)}$

b) $J = \frac{400}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{400}} \cos(800t)\, dt$

$J = \frac{400}{\pi} [\frac{1}{800} \sin(800t)]_0^{\frac{\pi}{400}}$

$J = \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi)$; $\boxed{J = 0}$

c)

$(I_e)^2 = \frac{400}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{400}} i^2(t)\, dt$

$i^2(t) = 5{,}76 \sin^2(400t)$

$i^2(t) = 5{,}76.(\frac{1 - \cos(800t)}{2})$

$i^2(t) = 2{,}88\ (1 - \cos(800t))$

D'où :

$(I_e)^2 = (\frac{400}{\pi})(2.88). \int_0^{\frac{\pi}{400}} (1 - \cos(800t)\, dt$

$= \frac{1152}{\pi} (\int_0^{\frac{\pi}{400}} 1 dt - J)$

$= \frac{1152}{\pi} [t]_0^{\frac{\pi}{400}} = 2{,}88$

D'où :

$I_e = \sqrt{2{,}88} = 1{,}697$ Ampères